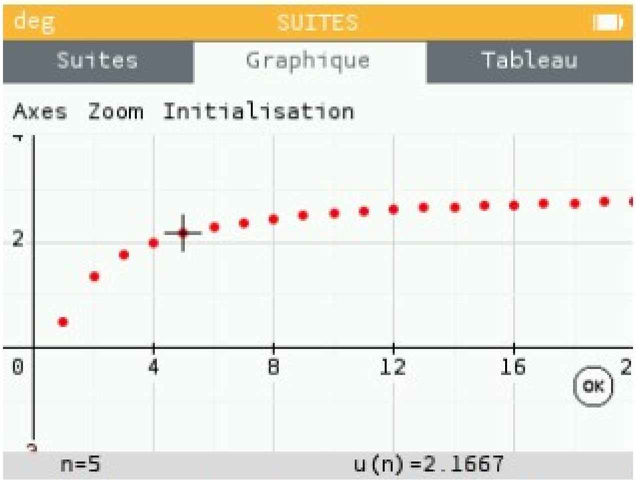
Corrigé

1. 

La suite semble être croissante et sa limite semble être 3.

2. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3(n+1)-2}{n+1+1} = \dfrac{3n+1}{n+2}$ donc

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(3n+1)(n+1) - (3n-2)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n^2+3n+n+1-(3n^2+6n-2n-4)}{(n+1)(n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n^2+4n+1-(3n^2+4n-4)}{(n+1)(n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+1)(n+2)} > 0$$

car $n \geqslant 0$, donc $n \geqslant 0$, donc $n+1>0$ et $n+2>0$

La suite est donc croissante.

3. La suite est croissante et $u_0 = -2$ donc pour tout entier n, $u_n \geq -2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - 3 = \frac{3n-2}{n+1} - 3 = \frac{3n-2-3(n+1)}{n+1}$$

$$u_n - 3 = \frac{3n-2-3n-3}{n+1} = \frac{-5}{n+1}$$

Or $-\dfrac{5}{n+1} < 0$ car $n+1>0$ donc $u_n - 3 \leq 0$ c'est-à-dire $u_n \leq 3$.
D'où pour tout $n \geq 0$, $-2 \leq u_n \leq 3$.

4. Comme la suite est croissante et sa limite est 3, on peut trouver n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 2,8$.

On résout $\dfrac{3n-2}{n+1} \geq 2,8$
$\iff 3n-2 \geq 2,8(n+1)$ car $n+1>0$
$\iff 3n-2 \geq 2,8n+2,8$
$\iff 0,2n \geq 4,8 \iff n \geq 24$
À partir de $n_0 = 24$, on a pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 2,8$.